ГИА

Г.В. Сычёва, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев

МАТЕМАТИКА

ТЕМА

Функции

9 класс

Тестовые задания частей 1 и 2

ВПЕРВЫЕ!

АВС — Азбука ГИА

A B C — Азбука ГИА

Г.В. Сычёва, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев

МАТЕМАТИКА

ФУНКЦИИ

Астрель
Москва

УДК 373:51
ББК 22.1я721
С95

Сычёва, Г.В.

С95 Математика : Функции / Г.В. Сычёва, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев. — М.: Астрель, 2012. — 31, [1] с. (АВС — Азбука ГИА).

ISBN 978-5-271-39071-5 (ООО «Издательство Астрель»)

Настоящее пособие предназначено для подготовки девятиклассников к успешной сдаче ГИА. Приведен необходимый теоретический материал и задания для самостоятельного решения. Все задачи для самостоятельного решения снабжены ответами.

Пособие предназначено для учащихся общеобразовательных школ, а также учителей.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

Тесты

Сычёва Галина Владимировна, Гусева Наталья Борисовна
Гусев Владимир Алексеевич

МАТЕМАТИКА

Функции

Редакция «*Образовательные проекты*»

Отв. редактор *Г.Н. Хромова*. Худ. редактор *Т.Н. Войткевич*
Тех. редактор *А.Л. Шелудченко*. Корректор *И.Н. Мокина*
Дизайн обложки *Н.А. Шармай*
Оригинал-макет подготовлен ООО «БЕТА-Фрейм»

Подписано в печать 14.10.2011. Формат $84\times108\ {}^1/_{32}$.
Усл. печ. л. 1,68. Тираж экз. Заказ №

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953005 — литература учебная

Сертификат соответствия № РОСС RU.AE51.H15301 от 04.05.2011

ООО «Издательство Астрель» 129085, Москва, пр-д Ольминского, д. 3а

Издаётся при техническом участии ООО «Издательство АСТ»

ISBN 978-5-271-39071-5 (ООО «Издательство Астрель»)

Содержание

Предисловие

Пособие рассчитано на самостоятельную или под руководством учителя подготовку выпускников 9-х классов к государственной итоговой аттестации (ГИА) по математике в новой форме.

Каждый вариант экзаменационной работы состоит из 2-х частей и включает 23 задания. Семь из них посвящены теме «Функции». В первой части — это задания 2, 10, 12, 16 и 18, во второй части одно задание.

В заданиях 2 и 10 необходимо уметь прочитать предложенные графики и выбрать правильные ответы. В заданиях 12 требуется сопоставить график с математической формулой, которой он соответствует. Задания 16 и 18 связаны с графическим решением систем уравнений и неравенств. В более сложных заданиях требуется определить значения параметра, при котором будут выполняться заданные условия.

В учебном пособии всё содержание темы «Функции» состоит из двух разделов: «Функции и их графики» и «Использование свойств функций в решении уравнений и неравенств». В каждом разделе даётся краткое изложение теоретического материала и примеры решения типовых задач, соответствующих формату ГИА. Для тренинга и самопроверки приведено большое количество заданий различного уровня сложности. В конце книги к ним даны ответы.

Функции и их графики

Основные понятия

Функцией называется соответствие между двумя множествами, например, X и $У$, при котором каждому элементу множества X соответствует *единственный* элемент множества $У$.

Если буквой x обозначить переменную, значениями которой являются элементы множества X, а буквой y — переменную, значениями которой являются элементы множества $У$, то каждому значению x будет соответствовать единственное значение y. Переменную x называют *независимой переменной* или *аргументом*, а переменную y — *зависимой переменной*. Говорят также, что y является функцией от x и пишут $y = f(x)$.

Заметим, что формула $y = f(x)$, задающая функцию, есть лишь указатель того, какие действия и в какой последовательности необходимо выполнять над значением x, чтобы получить соответствующее ему значение y.

Пример 1. Функция задана формулой $f(x) = \dfrac{4x}{x+5}$. Найдите значение функции при $x = 5$.

Решение. $f(5) = \dfrac{4 \cdot 5}{5+5} = \dfrac{20}{10} = 2$. *Ответ:* 2.

Для обозначения аргумента и функции могут быть использованы различные буквы латинского или греческого алфавита.

Областью определения функции $y = f(x)$ называется множество всех значений аргумента x, при которых функция y существует. Область определения функции $y = f(x)$ обозначается $D(y)$ или $D(f)$. Если функция задана с помощью формулы $y = f(x)$ и область её определения не указана, то областью определения этой функции является множество всех значений x, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл. Например, областью определения функции $y = \dfrac{x^3+10}{5-x}$ является множество действительных чисел, не равных 5. Можно записать, что $D(y) = (-\infty; 5) \cup (5; \infty)$.

Область определения функции $f(x) = \sqrt{-x^2}$ состоит из единственного значения аргумента, равного нулю: $D(f) = \{0\}$. Для функции $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ областью определения служит отрезок $[-1; 1]$. Можно записать, что $D(f) = [-1; 1]$

или $t \in [-1; 1]$. Рассмотрение любой функции обычно начинают с указания её области определения.

Областью значений функции $y = f(x)$ называется множество всех значений, которые может принимать y. Область значений функции обозначается $E(y)$ или $E(f)$. Например, для функции $f(x) = x^3$, где $-1 \leqslant x \leqslant 2$, областью значений служит промежуток $[-1; 8]$, т.е. $E(f) = [-1; 8]$. Функция $y = 9x$ определена на $\boldsymbol{R}$ и принимает любые действительные значения, т.е. $E(y) = (-\infty; +\infty)$. Можно записать и так: $E(y) = \boldsymbol{R}$.

Нулями функции называются значения аргумента, при которых функция обращается в нуль. Например, функция $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x}$ определена при $x \neq 0$ и имеет два нуля: $x = -4$, $x = 4$. Функция $f(x) = \dfrac{x^2 + 16}{x}$ нулей не имеет.

Промежутками знакопостоянства функции $y = f(x)$ называются промежутки значений x, в которых функция принимает только положительные или только отрицательные значения.

Пример 2. Найдите промежутки знакопостоянства функции $y = x^2 - 4$.

Решение. $D(y) = \boldsymbol{R}$; $y > 0$, если $x^2 - 4 > 0$, т.е. $x^2 > 4$, $|x| > 2$, $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; $y < 0$, если $x^2 - 4 < 0$, $x^2 < 4$, $|x| < 2$, $x \in (-2; 2)$.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке $(a; b)$, если для любых x_1, x_2, принадлежащих промежутку, и таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Например, функция $y = 6x + 1$ определена на $\boldsymbol{R}$ и является возрастающей на $\boldsymbol{R}$. Можно сказать, что функция $y = f(x)$ называется возрастающей на промежутке $(a; b)$, если большему значению аргумента в этом промежутке соответствует большее значение функции.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на промежутке $(a; b)$, если для любых x_1, x_2, принадлежащих промежутку и таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Иными словами, функция называется убывающей на промежутке $(a; b)$, если большему значению аргумента в этом промежутке соответствует меньшее значение функции. Например, функция $y = x^2$ является убывающей на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастающей — на $[0; +\infty)$.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной снизу*, если для любого $x \in D(f)$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant a$, где

a — некоторое число. Например, функция $f(x) = x^2$ определена на $\boldsymbol{R}$ и ограничена снизу, так как $f(x) \geqslant 0$.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху*, если для любого $x \in D(f)$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant b$, где b — некоторое число. Например, функция $f(x) = 7 - x^2$ определена на $\boldsymbol{R}$ и ограничена сверху, так как $f(x) \leqslant 7$.

Функция называется *ограниченной*, если существуют два числа a и b таких, что для любого $x \in D(f)$ выполняется двойное неравенство $a \leqslant f(x) \leqslant b$. Например, функция $y = \frac{1}{x^2 + 2}$ определена на множестве $\boldsymbol{R}$. При любом значении x функция принимает только положительные значения. Наибольшее значение функции достигается при $x = 0$ и равно $\frac{1}{2}$. Для любого значения x выполняется неравенство $0 < y \leqslant \frac{1}{2}$. Значит, функция $y = \frac{1}{x^2 + 2}$ является ограниченной.

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = -f(x)$.

Замечание 1. Выполнение равенств $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in D(f)$ означает, что если $x_0 \in D(f)$, то и $-x_0 \in D(f)$, т.е. область определения функции есть множество, симметричное относительно нуля.

Замечание 2. Функция может и не принадлежать ни к классу чётных, ни к классу нечётных функций. Например, функция $y = (x - 3)^2$ не является ни чётной, ни нечётной, так как $y(-x) = (-x - 3)^2$, т.е. $y(-x) = (x + 3)^2$ и ни одно из равенств $y(-x) = y(x)$ или $y(-x) = -y(x)$ не выполняется.

- Способы задания функций:

— табличный;
— аналитический;
— графический.

В некоторых случаях функцию задают путем описания.

При табличном способе задаётся готовая таблица соответствующих значений аргумента и функции.

При аналитическом способе указывается формула, устанавливающая зависимость функции от аргумента. Примеры такого задания функции были приведены выше.

На разных промежутках значений аргумента функция может задаваться различными формулами.

При графическом способе задания функции $y = f(x)$ на плоскости вводится система координат XOY и каждой паре $(a; b)$ соответствующих значений x и y ставится в соответствие точка с координатами $x = a$, $y = b$.

Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Иными словами, графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x; f(x))$.

Например, график функции, заданной формулой $f(x) = \sqrt{-x^2}$, состоит всего лишь из одной точки $O(0; 0)$. Графиком функции $y = 0$ является множество всех точек оси Ox. Графиком функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ служит полуокружность с центром $O(0; 0)$ и радиусом 1, расположенная не ниже оси Ox.

По заданному графику функции можно «прочитать» её область определения, множество значений, основные свойства функции, значение функции при заданном значении аргумента (и наоборот).

Виды функций

Рассмотрим функции, изучаемые в основной школе.

1. Линейная функция

Линейной называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x — независимая переменная (аргумент), k и b — любые числа.

Если в формуле $y = kx + b$ $b = 0$, $k \neq -0$, то линейная функция $y = kx$ выражает прямую пропорциональность; число k в этой формуле называется *коэффициентом пропорциональности*.

Если $k = 0$, то линейная функция $y = b$ принимает при всех x одно и то же значение, равное b.

<u>Графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая</u> (рис. 1). Число k называется *угловым коэффициентом* этой прямой. Чтобы построить график линейной функции, достаточно найти координаты двух точек графика, отметить эти точки на координатной плоскости и провести через них прямую.

Если $b = 0$, то прямая $y = kx$ пройдёт через начало координат.

Если $k = 0$, $b = 0$, то прямая $y = 0$ совпадает с осью Ox.

Если $k = 0$, $b \neq 0$, то прямая $y = b$ параллельна оси Ox.

Если $k > 0$, то прямая образует с положительным направлением оси Ox острый угол, а если $k < 0$, то — тупой.

Число b для графика функции $y = kx + b$ называется *начальной ординатой* прямой и является ординатой точки пересечения прямой с осью Oy.

Если $b > 0$, то прямая пересекает положительную полуось Oy, а при $b < 0$ — отрицательную полуось Oy.

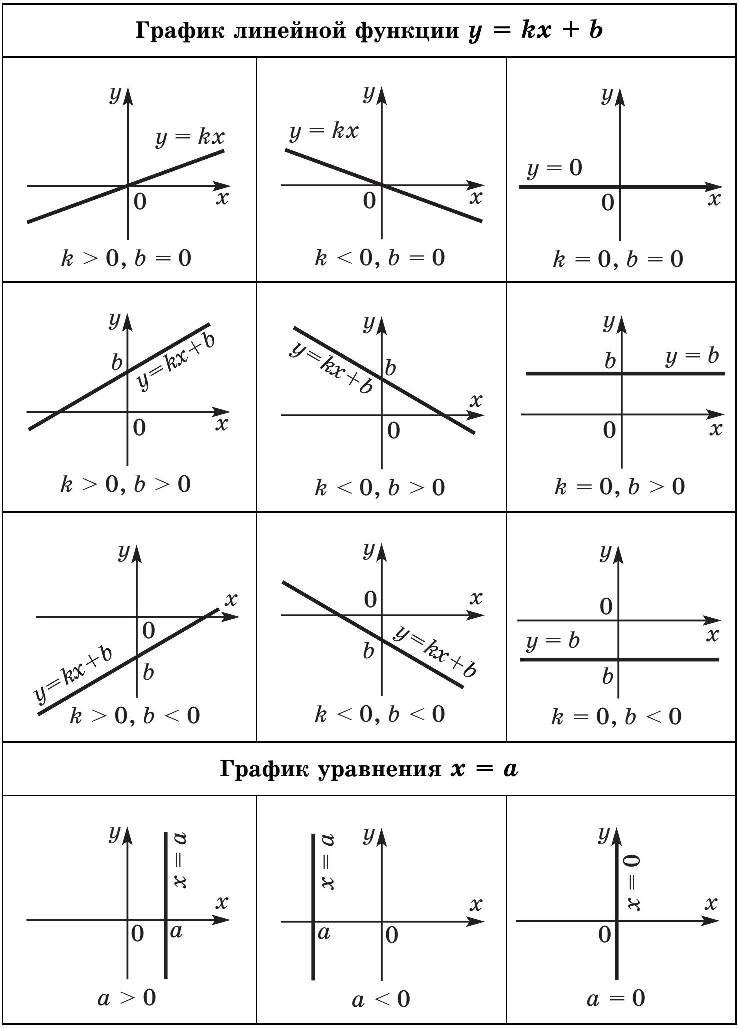


Рис. 1

Прямая, перпендикулярная оси Ox, *не может быть* графиком функции, так как одному значению x соответствует бесконечное множество значений y для точек такой прямой.

Прямая, перпендикулярная оси Ox, является графиком уравнения $x = a$ (рис. 1).

Если угловые коэффициенты прямых, являющихся графиками линейных функций, различны ($k_1 \neq k_2$), то прямые пересекаются.

Если угловые коэффициенты прямых, являющихся графиками линейных функций, одинаковы ($k_1 = k_2$), при этом $b_1 \neq b_2$, то прямые параллельны.

Пример 3. На рис. 2 изображены графики линейных функций $y = kx + b$. Установите соответствие между графиками и знаками коэффициентов k и b.

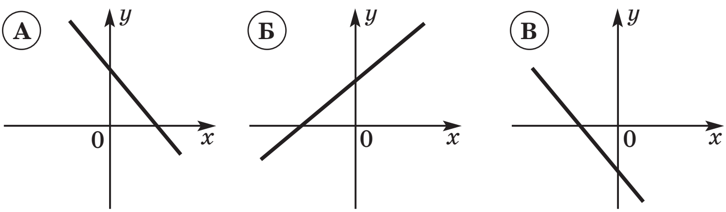


Рис. 2

1) $k < 0$, $b < 0$;
2) $k < 0$, $b > 0$;
3) $k > 0$, $b > 0$;
4) $k > 0$, $b < 0$.

Ответ внесите в таблицу

А	Б	В

Решение. В первом случае прямая образует с положительным направлением оси Ox тупой угол (т.е. $k < 0$) и пересекает положительную полуось Oy (т.е. $b > 0$). Значит, для графика А верен *ответ* 2.

Во втором случае угол прямой с положительным направлением оси Ox острый (т.е. $k > 0$) и точка пересечения с осью Oy находится на положительной полуоси Oy (т.е. $b > 0$). Значит, для графика Б верен ответ 3. В случае В имеем $k < 0$, $b < 0$, т.е. верен ответ 1. *Ответ:*

А	Б	В
2	3	1

Пример 4. Для каждой функции, заданной формулой, укажите её график (рис. 3).

А. $y = -x + 2$; Б. $y = 3x + 1$; В. $y = x$.

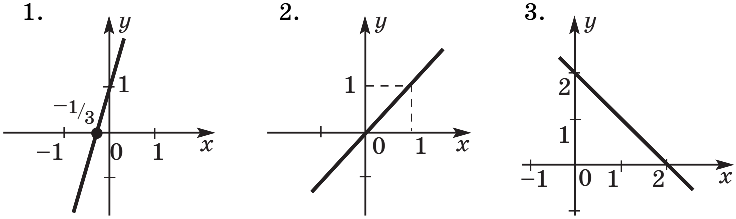


Рис. 3

Ответ внесите в таблицу

А	Б	В

Решение. График функции $y = -x + 2$ образует с осью Ox тупой угол (так как $k = -1 < 0$) и пересекает ось Oy в точке (0; 2). Этим условиям удовлетворяет график 3. Точка (2; 0), принадлежащая графику 3, удовлетворяет равенству $y = -x + 2$: $0 = -2 + 2$. Итак, функции А соответствует график 3.

График функции $y = 3x + 1$ образует с осью Ox острый угол (так как $k = 3 > 0$) и пересекает ось Oy в точке (0; 1). Рассматриваем график 1. Точка $\left(-\dfrac{1}{3}; 0\right)$ этого графика также удовлетворяет функции $y = 3x + 1$: $0 = 3 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) + 1$. Значит, функции Б соответствует график 1.

График функции $y = x$ проходит через начало координат и точку (1; 1).

Функции В соответствует график 2. *Ответ:*

А	Б	В
3	1	2

.

Пример 5. Велосипедист отправился из города на дачу, где провёл некоторое время, после чего вернулся домой. На каком рисунке изображён график его движения (рис. 4) (по горизонтальной оси откладывается время движения t, по вертикальной — расстояние S от дома)?

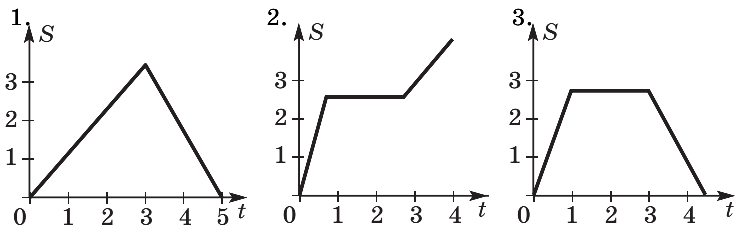


Рис. 4

Решение. Расстояние велосипедиста от дома в течение некоторого времени увеличивалось, затем оставалось постоянным, после чего уменьшалось. Значит, функция $S = f(t)$ в некотором промежутке значений t была возрастающей, затем постоянной, после чего стала убывающей. Этим условиям удовлетворяет график 3. *Ответ:* 3.

2. Обратная пропорциональность

Обратной пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой $y = \frac{k}{x}$, где x — независимая переменная (аргумент), $k \neq 0$; k называют *коэффициентом обратной пропорциональности*.

График функции $y = \frac{k}{x}$ называется *гиперболой*.

Областью определения функции, заданной формулой $y = \frac{k}{x}$, является множество действительных чисел, отличных от нуля. Значит, на графике функции не будет точки с абсциссой $x = 0$. Говорят, что при $x = 0$ функция имеет разрыв. Область значений функции есть также множество действительных чисел, отличных от нуля. График функции $y = \frac{k}{x}$ не имеет общих точек ни с осью Ox, ни с осью Oy. Общий вид графика и его расположение относительно осей координат существенно зависят от коэффициента k.

Если $k > 0$, то при $x > 0$ имеем $y > 0$, а при $x < 0$ имеем $y < 0$. График располагается в первой и третьей координатных четвертях (рис. 5). На рисунке изображён график функции $y = \frac{1}{x}$. При $k > 0$ функция $y = \frac{1}{x}$ является убывающей на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$.

Если $k < 0$, то при $x > 0$ имеем $y < 0$, а при $x < 0$ имеем $y > 0$. График функции $y = \frac{k}{x}$ при $k < 0$ расположен во второй и четвёртой координатных четвертях (рис. 6). На рисунке изображён график функции $y = -\frac{k}{x}$. При $k < 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ является возрастающей на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$. При любом $k \neq 0$ функция не имеет нулей и является нечётной, так как $y(-x) = -y(x)$. График функции симметричен относительно начала координат.

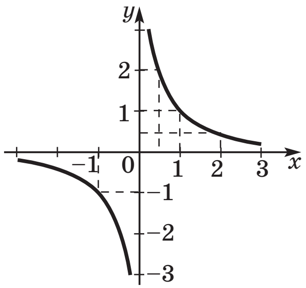


Рис. 5

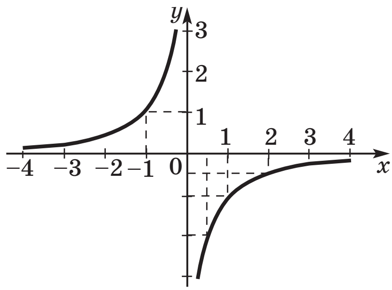


Рис. 6

Пример 6. Принадлежит ли графику функции $y = \dfrac{5}{x}$ точка: а) $A\left(15;\ \dfrac{1}{3}\right)$; б) $B(-2;\ 2{,}5)$?

Решение. Проверяем, удовлетворяют ли координаты данных точек функциональной зависимости $y = \dfrac{5}{x}$:

а) $A\left(15;\ \dfrac{1}{3}\right)$; $\dfrac{1}{3} \overset{?}{=} \dfrac{5}{15}$; $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$; точка $A\left(15;\ \dfrac{1}{3}\right)$ принадлежит графику функции $y = \dfrac{5}{x}$;

б) $B(-2;\ 2{,}5)$; $2{,}5 \overset{?}{=} \dfrac{5}{-2}$; $2{,}5 \neq -2{,}5$; точка $B(-2;\ 2{,}5)$ не принадлежит графику функции $y = \dfrac{5}{x}$; *Ответ:* а) да; б) нет.

Пример 7. Найдите формулу обратной пропорциональности, если известно, что график функции проходит через точку $M(-1;\ 2)$.

Решение. Формула обратной пропорциональности имеет вид $y = \dfrac{k}{x}$. Требуется найти коэффициент k. По условию точка $M(-1;\ 2)$ принадлежит графику функции $y = \dfrac{k}{x}$. Значит, её координаты должны удовлетворять искомой зависимости: $2 = \dfrac{k}{-1}$; $k = -2$. Тогда $y = -\dfrac{2}{x}$. *Ответ:* $y = -\dfrac{2}{x}$.

Пример 8. Среди данных функций укажите обратную пропорциональность.

1) $y = \pi \cdot x$; 2) $y = 4x^2$; 3) $y = \dfrac{4}{x}$; 4) $y = \dfrac{2}{x^2}$. *Ответ:* 3.

3. Степенная функция с натуральным показателем

Степенной функцией с натуральным показателем называется функция, которую можно задать формулой вида $y = x^n$, где x — независимая переменная (аргумент), а n — определённое натуральное число.

Если $n = 1$, то степенная функция имеет вид $y = x$ и является частным случаем линейной функции с угловым коэффициентом $k = 1$. График функции $y = x$ есть прямая, проходящая через начало координат, совпадающая с биссектрисами первого и третьего координатных углов (рис. 7).

Рассмотрим степенные функции с чётным показателем: $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$, ..., $y = x^{2k}$, $(k \in \boldsymbol{N})$.

Область определения таких функций есть множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$, а область значений − множество неотрицательных чисел: $D(y) = (-\infty;\ +\infty)$, $E(y) = [0;\ +\infty)$; $y = 0$, если $x = 0$; $x = 0$ — единственный нуль функции.

Любым противоположным значениям аргумента соответствует одно и то же значение функции: $(-x)^{2k} = x^{2k}$. Значит, функции $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$, ..., $y = x^{2k}$ обладают свойством чётности.

График любой степенной функции с чётным показателем $y = x^{2k}$, $(k \in \boldsymbol{N})$ проходит через начало координат, расположен выше оси Ox при $x \neq 0$, симметричен относительно оси Oy. График функции $y = x^2$ называется *параболой*.

Графики функций $y = x^4$, $y = x^6$, ... имеют такой же вид, как график функции $y = x^2$, имеют с параболой $y = x^2$ общие точки $(-1;\ 1)$, $(0;\ 0)$, $(1;\ 1)$, а отличаются лишь тем, что при близких к нулю значениях x более плотно прилегают к оси Ox, а при $x > 1$ более круто поднимаются вверх (рис. 8).

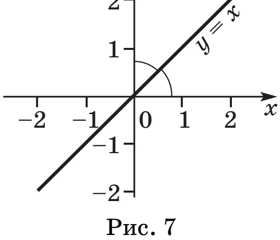


Рис. 7

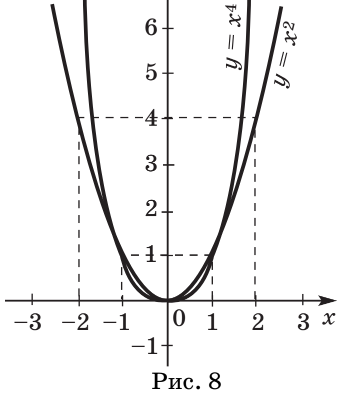


Рис. 8

Степенные функции с нечётным показателем $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$, ..., $y = x^{2k-1}$, ... ($k \in \boldsymbol{N}$) существуют при любом действительном значении x ($x \in \boldsymbol{R}$) и принимают любые действительные значения, $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

При значении аргумента, равном нулю, значение функции также равно нулю. Значит, график любой степенной функции проходит через начало координат. При этом $x = 0$ — единственный нуль степенной функции.

Для степенных функций с нечётным показателем любым противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции.

Функции $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$, ..., $y = x^{2k-1}$ обладают свойством нечётности.

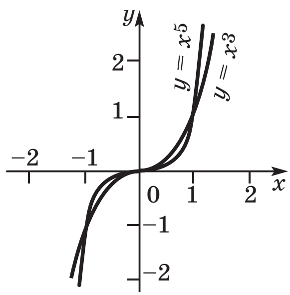


Рис. 9

График любой степенной функции с нечётным показателем $y = x^{2k-1}$,... ($k \in \boldsymbol{N}$) проходит через начало координат и симметричен относительно начала координат. График функции $y = x^3$ называется *кубической параболой*.

Графики функций $y = x^5$, $y = x^7$,... имеют такой же вид, как кубическая парабола, имеют с ней общие точки $(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$, но при близких к нулю значениях x более плотно прилегают к оси Ox, а при $x > 1$ более круто поднимаются вверх (рис. 9).

Пример 9. На рисунке изображены графики трёх функций (рис. 10). Установите соответствие между графиками и формулами, задающими функции.

Ответ внесите в таблицу

А	Б	В

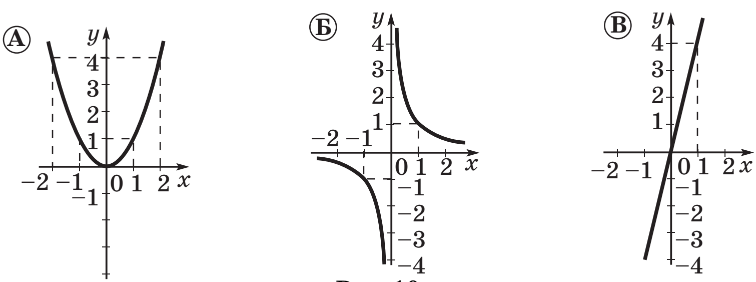


Рис. 10

1. $y = \dfrac{1}{x}$; 2. $y = x^4$; 3. $y = 4x$; 4. $y = x^2$.

Решение. На рис. А дан график степенной функции с чётным показателем.

Точка (2; 4) принадлежит графику. Проверяем функции $y = x^4$ и $y = x^2$: $y = x^4$, $4 \neq 2^4$; график функции $y = x^4$ не проходит через точку (2; 4); $y = x^2$, $4 = 2^2$, верно; на рис. А изображён график функции $y = x^2$.

На рис. Б имеем график обратной пропорциональности. Точка (1; 1) принадлежит графику и её координаты удовлетворяют зависимости $y = \dfrac{1}{x}$; $1 = \dfrac{1}{1}$. На рис. Б график функции $y = \dfrac{1}{x}$.

На рис. В дан график прямой пропорциональности. Координаты точки (1; 4), лежащей на графике, удовлетворяют равенству $y = 4x$: $4 = 4 \cdot 1$. На рис. В график функции $y = 4x$. *Ответ:*

А	Б	В
4	1	3

.

Пример 10. Найдите среди данных функций функцию, убывающую на промежутке $(-\infty; 0)$.

1. $y = -\dfrac{7}{x}$; 2. $y = 2x + 7$; 3. $y = x^4$; 4. $y = 5x$. *Ответ:* 3.

Пример 11. Найдите среди данных функций функцию, возрастающую на всей области определения.

1. $y = x^3$; 2. $y = 3x^2$; 3. $y = -\dfrac{4}{x}$; 4. $y = -x$. *Ответ:* 1.

4. Квадратичная функция

Квадратичной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Если $b = c = 0$, $a = 1$, то функция принимает уже рассмотренный вид $y = x^2$ (степенная функция), графиком её служит парабола. График функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ также называется *параболой*.

График функции $y = ax^2$ при $a > 1$ получается растяжением графика функции $y = x^2$ (параболы) от оси Ox в a раз, при $0 < a < 1$ — сжатием к оси Ox в $\dfrac{1}{a}$ раз.

В общем случае график функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ получается из графика функции $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов — вдоль оси Ox на m ед. $\left(m = -\frac{b}{2a}\right)$ и вдоль оси Oy на n ед. $\left(n = -\frac{D}{4a}\right)$. Таким образом, графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ служит парабола с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$. Осью симметрии параболы является прямая $x = -\frac{b}{2a}$ $(x = m)$. Ветви параболы направлены вверх при $a > 0$, вниз — при $a < 0$.

На практике для построения графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ можно пользоваться следующим алгоритмом:

1. По знаку коэффициента a при старшем члене находим направление ветвей параболы (вверх или вниз).

2. Определяем абсциссу вершины параболы по формуле $x = -\frac{b}{2a}$.

Вычисляем ординату вершины параболы, подставив в данную формулу $y = ax^2 + bx + c$ вместо x значение абсциссы вершины.

3. Находим координаты каких-нибудь дополнительных точек, взяв для x «удобные» значения, и точек, симметричных полученным относительно оси симметрии параболы.

4. По точкам строим параболу, учитывая направление её ветвей.

Пример 12. Постройте график функции

$$f(x) = -0{,}75x^2 + 3x + 1.$$

Решение.

1. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вниз.

2. Находим абсциссу вершины $x_{\text{В}} = \frac{-3}{2 \cdot (-0{,}75)} = 2$; вычисляем ординату вершины, подставив в данную функцию $x = 2$: $f(2) = -0{,}75 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 = 4$. Координаты вершины $(2; 4)$; $x = 2$ — уравнение оси симметрии параболы.

3. Если $x = 0$, $f(0) = 1$; $(0; 1)$ — точка пересечения параболы с осью Oy; $(4; 1)$ — точка параболы, симметричная найденной относительно прямой $x = 2$ (оси симметрии параболы).

4. Строим параболу по найденным точкам (рис. 11).

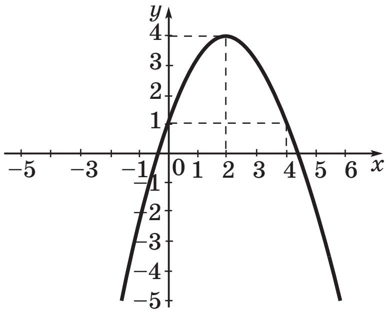


Рис. 11

Возможны шесть случаев расположения параболы $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси Ox в зависимости от знака коэффициента a при старшем члене и дискриминанта D (рис. 12).

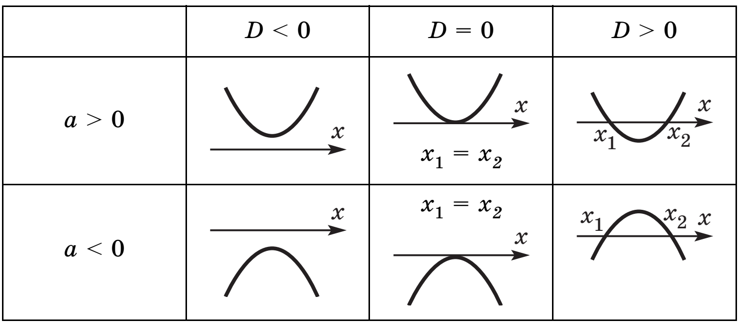


Рис. 12

Замечание. Значение свободного члена c в уравнении $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ равно ординате точки пересечения параболы с осью Oy.

Пример 13. Для каждой функции, заданной формулой, укажите её график (рис. 13).

Ответ внесите в таблицу

А	Б	В

А. $y = 2 - x^2$; Б. $y = (x - 2)^2$; В. $y = x^2 - 2$.

Решение. Графиком функции $y = 2 - x^2$ служит парабола, ветви которой направлены вниз, вершиной является точка $(0; 2)$; график функции изображён на рис. 13-2.

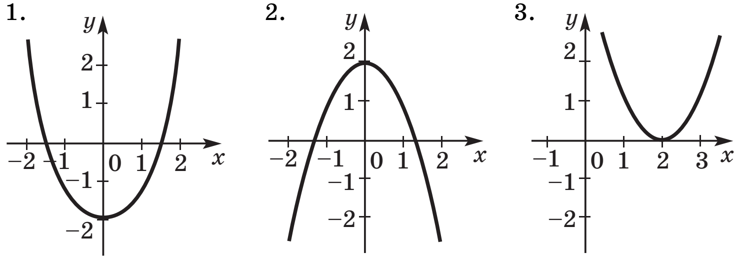


Рис. 13

График функции $y = (x - 2)^2$ — парабола, смещённая вдоль оси Ox на 2 ед. вправо; график функции Б изображён на рис. 13-3.

Графиком функции $y = x^2 - 2$ является парабола, смещённая вдоль оси Oy на 2 ед. вниз, ветви параболы направлены вверх; график функции В изображён на рис. 13-1.

Ответ:

А	Б	В
2	3	1

Пример 14. Используя график функции $y = f(x)$ (рис.14), определите, какое утверждение верно.

1. $f(2) > f(1)$. 2. $f(0) < 0$. 3. Функция возрастает на промежутке $(-\infty; 1]$. 4. Функция убывает на промежутке $(-\infty; 1]$. *Ответ:* 3.

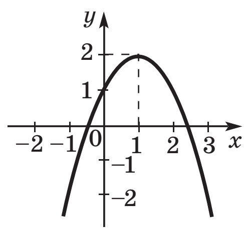


Рис. 14

Пример 15. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (рис. 15). Укажите наибольшее значение функции.

1. 3; 2. 4; 3. −3; 4. 1.

Решение. Требуется найти на данном графике функции точку, которая имеет самую большую ординату, т.е. самую высокую точку графика. В данном случае такой является точка (−1; 4). Наибольшее значение функции равно 4, что соответствует ответу 2. *Ответ:* 2.

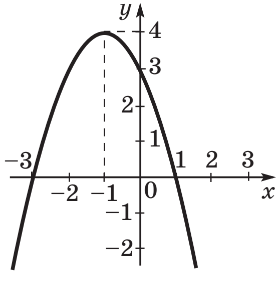


Рис. 15

Пример 16. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (рис. 16). Сколько нулей имеет функция?

1. Ни одного; 3. 1;
2. 3; 4. 2.

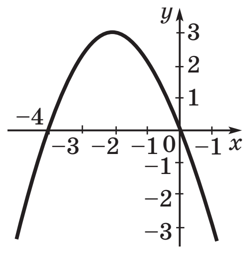


Рис. 16

Решение. Требуется определить, при скольких значениях x функция обращается в нуль, т.е. сколько общих точек с осью Ox имеет график функции. Данный график пересекает ось Ox в двух точках, т.е. функция имеет два нуля. Верен ответ 4. *Ответ:* 4.

Задания для самостоятельного решения

Через какую точку не проходит график функции (1–2)?

1. $y = 2x - 3$.

1. (2; 1); 2. (−3,5; 10); 3. (−5; −13); 4. (1,2; −0,6).

2. $y = 5 - 2x$.

1. (−0,3; 5,6); 2. $\left(\frac{3}{4}; 3{,}5\right)$; 3. (1,4; 3,2);4. (0,1; 4,8).

Найдите область определения функции (3–6).

3. $y = \sqrt{3 - x}$. **4.** $y = -\dfrac{2x}{\sqrt{5x + 4}}$.

5. $y = \sqrt{4 + 3x - x^2}$. **6.** $y = \sqrt{x^2 + 7x - 8}$.

7. Найдите среди данных функций функцию прямой пропорциональности, график которой расположен в I и III координатных четвертях.

1. $y = -2x$; 2. $y = \frac{1}{2}x + 1$; 3. $y = 4$; 4. $y = 0{,}2x$.

8. Найдите среди данных функций функцию прямой пропорциональности, график которой расположен во II и IV координатных четвертях.

1. $y = -0{,}5x + 2$; 2. $y = -7x$; 3. $y = 1{,}5x$; 4. $y = -7$.

9. Найдите среди данных функций функцию обратной пропорциональности, график которой расположен в I и III координатных четвертях.

1. $y = 2x$; 2. $y = \frac{4}{x}$; 3. $y = -3x$; 4. $y = -\frac{3}{x}$.

10. Найдите среди данных функций функцию обратной пропорциональности, график которой расположен во II и IV координатных четвертях.

1. $y = \frac{5}{x}$; 2. $y = -4x$; 3. $y = -\frac{6}{x}$; 4. $y = 7x$.

11. Прямая проходит через начало координат и точку $\left(2;\ \frac{1}{7}\right)$. Выберите уравнение этой прямой.

1. $y = \frac{1}{7}x + \frac{1}{7}$; 2. $y = \frac{2}{7}x$; 3. $y = \frac{1}{2}x$; 4. $y = \frac{1}{14}x$.

12. При каком значении k график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A(2; -3)$?

13. При каком значении k график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $M(0{,}8; 5)$?

14. Найдите среди данных функций функцию, возрастающую на всей области определения.

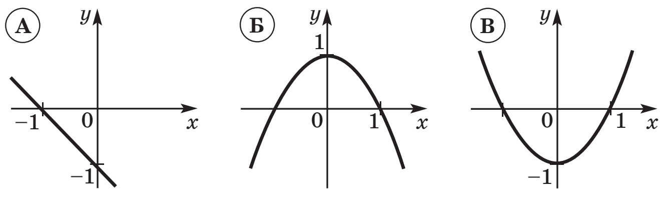
1. $y = x^2$; 2. $y = \frac{2}{x}$; 3. $y = -3x + 5$; 4. $y = 9x - 2$.

15. Найдите среди данных функций функцию, убывающую на всей области определения.

1. $y = \sqrt{x}$; 2. $y = 4 - x^2$; 3. $y = 1 - x$; 4. $y = 5x$.

Для каждой функции, заданной формулой, укажите её график. Ответ впишите в таблицу (16–19).

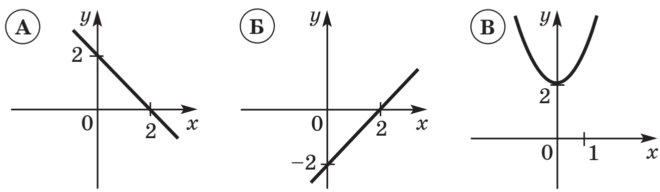
16. 1) $y = x^2 - 1$; 2) $y = -x - 1$; 3) $y = 1 - x^2$.



Ответ:

1	2	3

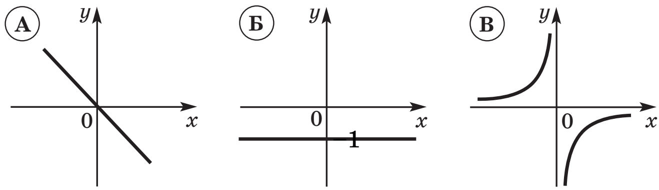
17. 1) $y = x - 2$; 2) $y = x^2 + 2$; 3) $y = 2 - x$.



Ответ:

1	2	3

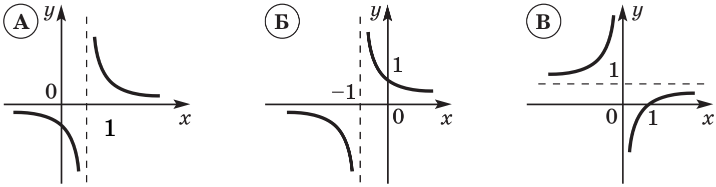
18. 1) $y = -1$; 2) $y = -\dfrac{1}{x}$; 3) $y = -x$.



Ответ:

1	2	3

19. 1) $y = \dfrac{1}{x+1}$; 2) $y = \dfrac{1}{x-1}$; 3) $y = 1 - \dfrac{1}{x}$.



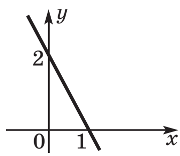
Ответ:

1	2	3

График какой функции изображён на рисунке (20–25)?

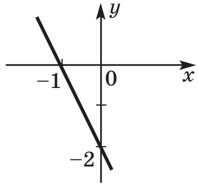
20.

1) $y = 2x + 1$;
2) $y = x + 2$;
3) $y = 1 - 2x$;
4) $y = 2 - 2x$.



21.

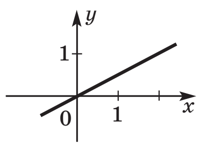
1) $y = 2x - 2$;
2) $y = -2x - 1$;
3) $y = -2x - 2$;
4) $y = -x - 2$.



22.

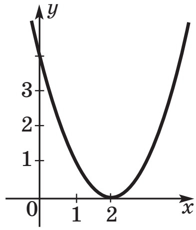
1) $y = 2x$; 3) $y = \dfrac{1}{2}x$;

2) $y = \dfrac{2}{x}$; 3) $y = \dfrac{x^2}{2}$.



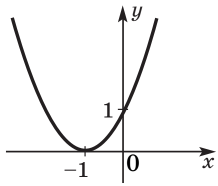
23.

1) $y = x^2 + 2$;
2) $y = (x - 2)^2$;
3) $y = (x + 2)^2$;
4) $y = x^2 - 2x$.



24.

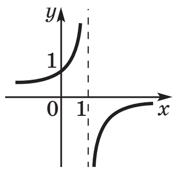
1) $y = (x + 1)^2$;
2) $y = (x - 1)^2$;
3) $y = x^2 - 1$;
4) $y = -x^2 - x + 1$.



25.

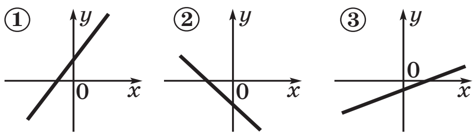
1) $y = \dfrac{1}{x + 1}$; 3) $y = \dfrac{1}{x} + 1$;

2) $y = \dfrac{1}{1 - x}$; 4) $y = \dfrac{1}{x - 1}$.



На рисунке изображены графики функций вида $y = kx + b$. Установите соответствие между графиками и знаками коэффициентов k и b. Ответ занесите в таблицу (26, 27).

26.

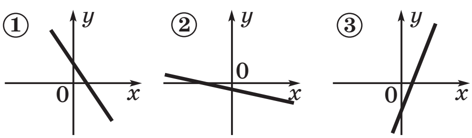


А. $k < 0$, $b < 0$; Б. $k > 0$, $b < 0$; В. $k > 0$, $b > 0$.

Ответ:

1	2	3

27.

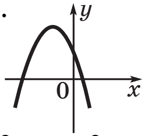
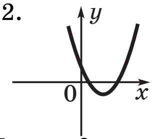
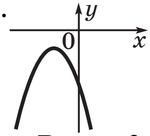


А. $k > 0$, $b < 0$; Б. $k < 0$, $b > 0$; В. $k < 0$, $b < 0$.

Ответ:

1	2	3

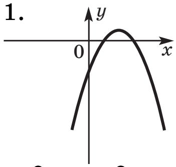
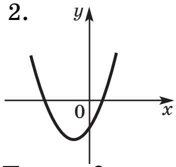
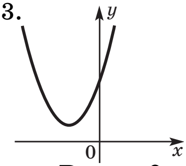
На рисунке изображены графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Установите соответствие между графиками и знаками коэффициентов a и c. Ответ внесите в таблицу (28, 29).

28. 1.  2.  3. 

А. $a < 0$, $c < 0$; Б. $a < 0$, $c > 0$; В. $a > 0$, $c > 0$.

Ответ:

1	2	3

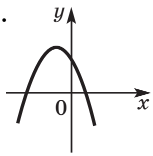
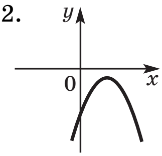
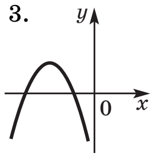
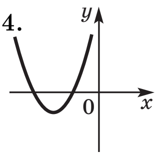
29. 1.  2.  3. 

А. $a > 0$, $c < 0$; Б. $a > 0$, $c > 0$; В. $a < 0$, $c < 0$.

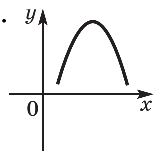
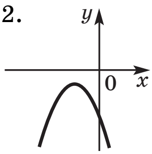
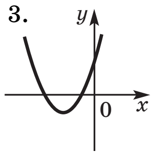
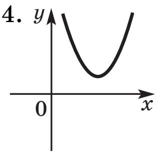
Ответ:

1	2	3

30. Дана функция $y = ax^2 + bx + c$. На каком рисунке изображён график этой функции, если известно, что $a < 0$ и квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два отрицательных корня?

1.  2.  3.  4. 

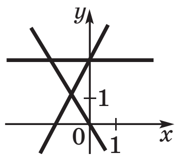
31. Дана функция $y = ax^2 + bx + c$. На каком рисунке изображён график этой функции, если известно, что $a < 0$ и квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет действительных корней?

1.  2.  3.  4. 

Какая из прямых отсутствует на рисунке (32, 33)?

32.

1) $y = -2x$;
2) $y = 3$;
3) $y = 3x + 3$;
4) $y = 3x + 1$.



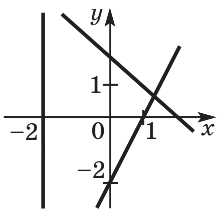
33.

1) $y = 2x - 2$;

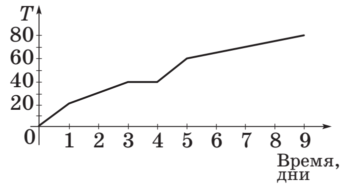
2) $y = -2$;

3) $y = -x + 2$;

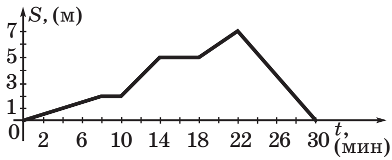
4) $x = -2$.



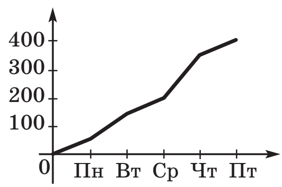
34. На графике показана зависимость общего количества зерна, собранного комбайном, от времени. По горизонтальной оси отмечены дни, а по вертикальной — количество зерна, собранного комбайном в тоннах. Какое набольшее количество зерна было собрано комбайном за один день?



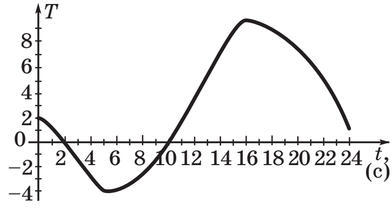
35. Гусеница поднялась вверх по стволу дерева, сделав две остановки для отдыха, и спустилась вниз. На графике показана высота, на которой находилась гусеница, в зависимости от времени. По горизонтальной оси откладывалось время в минутах, а по вертикальной — высота в метрах. За какое время гусеница спустилась вниз?



36. На графике показано количество деталей, изготовленных на станке за рабочую неделю (с понедельника по пятницу). На горизонтальной оси отмечены дни недели, а на вертикальной — количество деталей. Какое наибольшее количество деталей было изготовлено за один день?



37. На рисунке изображён график изменения температуры воздуха в течение суток. Используя этот график, укажите, сколько часов увеличивалась температура воздуха в течение суток?



Использование свойств функций в решении уравнений и неравенств

Монотонность функций

1. Монотонная функция каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента. Это означает, что любая прямая $y = a$ может пересечь график монотонной функции не более чем в одной точке. Отсюда следует, что уравнение $f(x) = a$, где $f(x)$ — монотонная функция и a – произвольное число, имеет не более одного корня. Если этот корень удаётся найти подбором, то на этом решение уравнения заканчивается.

Пример 1. Решите уравнение $x^5 - 32 = 0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $x^5 = 32$. Функция $y = x^5$ – возрастающая, правая часть уравнения есть постоянное число 32, значит, уравнение не может иметь более одного корня. Очевидно, что $x = 2$ — корень уравнения, так как $2^5 = 32$. Других корней быть не может. *Ответ:* 2.

2. Если функция $y = f(x)$ является возрастающей (убывающей), то функция $y = f(x) + c$ — возрастающая (убывающая) (c — любое число), $y = a \cdot f(x)$ — возрастающая (убывающая) при $a > 0$ и убывающая (возрастающая) при $a < 0$. Например, функция $y = 3\sqrt{x} + 2$ — возрастающая, а функция $y = -3\sqrt{x} + 2$ — убывающая на своей области определения, т.е. при $x \geqslant 0$.

3. <u>Сумма</u> двух возрастающих (убывающих) функций является функцией возрастающей (убывающей). Например, функция $f(x) = 5x + \sqrt[3]{x}$ является возрастающей на $\boldsymbol{R}$, а функция $f(x) = -\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ — убывающей при $x > 0$. Из свойств 1 – 3 следует, что если одна из функций $y = f(x)$ или $y = g(x)$ является возрастающей, а другая убывающей (или постоянной), то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня.

Действительно, если $y = f(x)$ — возрастающая, а $y = g(x)$ убывающая, то $y = -g(x)$ — возрастающая и, следовательно, $y = f(x) + (-g(x))$, т.е. $y = f(x) - g(x)$ — возрастающая функция.

Уравнение $f(x) = g(x)$, равносильное уравнению $f(x) - g(x) = 0$, имеет не более одного корня.

Пример 2. Решите уравнение $\sqrt{x} = 21 - 2x$.

Решение. Уравнение не может иметь более одного корня, так как $y = \sqrt{x}$ – возрастающая, а $y = 21 - 2x$ — убывающая функция. Корень $x = 9$ находим подбором. Других корней быть не может. *Ответ:* 9.

Пример 3. Решите уравнение $x^{2013} + 2011x = 2012$.

Решение. Уравнение имеет в левой части функцию возрастающую (как сумму двух возрастающих), а в правой части — постоянную. Значит, уравнение не может иметь более одного корня. Корень $x = 1$ находится подбором, других корней быть не может. *Ответ:* 1.

Пример 4. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x+9} + \sqrt[3]{4x+3} = -2x - 1.$$

Решение. Функция $\sqrt[3]{x+9} + \sqrt[3]{4x+3}$ — возрастающая, а функция $y = -2x - 1$ — убывающая. Корень $x = -1$ находим подбором: $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-1} = 2 - 1$. Других корней уравнение иметь не может. *Ответ:* -1.

Пример 5. Решите неравенство $\sqrt{2x} > 4 - x$.

Решение. ОДЗ неравенства: $x \geqslant 0$. Функция $y = \sqrt{2x}$ — возрастающая, а функция $y = 4 - x$ — убывающая на ОДЗ неравенства. Уравнение $\sqrt{2x} = 4 - x$ имеет единственный корень $x = 2$ (находим подбором). Тогда при $0 \leqslant x < 2$ имеем $\sqrt{2x} < 4 - x$, а при $x > 2$ выполняется данное неравенство $\sqrt{2x} > 4 - x$ (рис. 19). *Ответ:* $(2; +\infty)$.

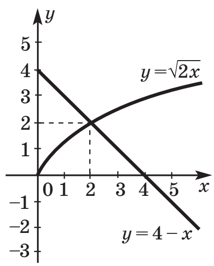


Рис. 17

Ограниченность функций

Теорема. Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функция $y = f(x)$ ограничена сверху и $f(x) \leqslant m$, а функция $y = g(x)$ ограничена снизу, причём $g(x) \geqslant m$, то уравнение равносильно системе $\begin{cases} f(x) = m, \\ g(x) = m. \end{cases}$ Если система решений не имеет, то у данного уравнения корней нет.

Пример 6. Решите уравнение

$$\sqrt{(2-x)^{2010} + 25} = -x^2 + 4x + 1.$$

Решение. Так как $(2-x)^{2010} \geqslant 0$, то $\sqrt{(2-x)^{2010}+25} \geqslant 5$, $x \in \boldsymbol{R}$. Графиком функции $y=-x^2+4x+1$ служит парабола, ветви которой направлены вниз; вершина параболы имеет координаты (2; 5). Значит, $y \leqslant 5$ при $x \in \boldsymbol{R}$. Итак, функция в левой части уравнения ограничена снизу числом 5, а функция в правой части уравнения ограничена числом 5 сверху. Равенство функций возможно, если существует значение x, при котором обе функции равны 5.

$\begin{cases} \sqrt{(2-x)^{2010}+25}=5, \\ -x^2+4x+1=5; \end{cases}$ $x=2$. *Ответ:* 2.

Пример 7. Решите уравнение $\sqrt{x^2+4}=2-|x|$.

Решение. ОДЗ уравнения: $x \in \boldsymbol{R}$. Функция $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ ограничена снизу: $\sqrt{x^2+4} \geqslant 2$, так как $x^2+4 \geqslant 4$. Функция $g(x)=2-|x|$ ограничена сверху: $2-|x| \leqslant 2$, так как $|x| \geqslant 0$. Уравнение $\sqrt{x^2+4}=2-|x|$ равносильно системе $\begin{cases} \sqrt{x^2+4}=2, \\ 2-|x|=2; \end{cases}$ $x=0$. *Ответ:* 0.

Другие задачи

Пример 8. Запишите уравнение прямой, параллельной прямой $y=-9x+5$ и проходящей через точку $M(-2; 10)$. В какой точке эта прямая пересечёт ось Oy?

Решение. Прямая, параллельная прямой $y=-9x+5$, имеет уравнение $y=-9x+b$. Так как точка $M(-2; 10)$ принадлежит искомой прямой, то должно выполняться равенство $10=-9(-2)+b$, откуда $b=-8$; $y=-9x-8$ — уравнение искомой прямой; $(0; -8)$ — точка пересечения этой прямой с осью Oy. *Ответ:* $y=-9x-8$; $(0; -8)$.

Пример 9. Выясните, лежат ли на одной прямой точки $A(1; 2)$, $B(-2; -1)$, $E(5; 6)$?

Решение. Составим уравнение прямой AB и проверим, принадлежит ли этой прямой точка E. Так как прямая AB не перпендикулярна оси Ox $(x_A \neq x_B)$, то её уравнение можно записать в виде $y=kx+b$. Координаты точек A и B должны удовлетворять этому уравнению, т.е. $\begin{cases} 2=k+b, \\ -1=-2k+b; \end{cases}$ $\begin{cases} k=1, \\ b=1 \end{cases}$ — решение системы; $y=x+1$ — уравнение прямой AB. Подставим координаты точки E в полученное уравнение: $6=5+1$. Точка E принадлежит прямой AB. *Ответ:* точки лежат на одной прямой.

Пример 10. Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1}$. При каких значениях аргумента функция принимает отрицательные значения?

Решение. Так как $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$, то $y = \dfrac{(x+1)(x-2)}{x+1}$; $y = x - 2$, где $x \neq -1$. Графиком данной функции служит прямая $y = x - 2$ с «выколотой» точкой $(-1; -3)$ (рис. 18). Функция принимает отрицательные значения, если $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2)$. *Ответ:* $(-\infty; -1) \cup (-1; 2)$.

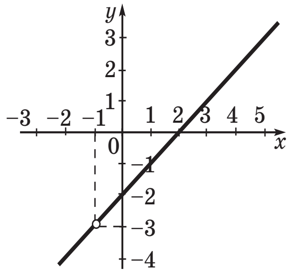


Рис. 18

Задания для самостоятельного решения

1. Прямая $y = kx + b$ проходит через точку $M(2{,}5; 4)$. Угловой коэффициент этой прямой равен 0,8. Запишите уравнение этой прямой и найдите координаты точки, в которой она пересекает ось ординат.

2. Найдите линейную функцию, график которой проходит через точку $A(0{,}5; -6)$ и параллелен прямой $y = 2x - 1$. Принадлежит ли графику этой функции точка $B(1{,}5; 4)$?

3. Найдите линейную функцию, график которой проходит через точку $M(-2; 3)$ и параллелен прямой $y = -4x + 5$. В какой координатной четверти нет точек этой функции?

4. Прямая $y = kx + b$ пересекает ось абсцисс в точке $E(1; 0)$ и проходит через точку $F(-2; -9)$. Запишите уравнение этой прямой. Проходит ли эта прямая через точку $A(6; 15)$?

5. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $T(1; 1)$ и $K(3; 7)$. В какой точке эта прямая пересекает ось ординат?

6. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(1; 5)$ и $B(3; -5)$. В какой точке эта прямая пересекает ось абсцисс?

7. Дана прямая $4x - 5y = 20$. Запишите уравнение прямой, симметричной данной, относительно оси ординат.

8. Дана прямая $3x + 7y = 21$. Запишите уравнение прямой, симметричной данной, относительно оси абсцисс.

9. Найдите значение c, при котором парабола $y = x^2 + 4x + c$ касается оси абсцисс. Найдите координаты точки касания.

10. Известно, что парабола проходит через точку $A(4; -5)$ и её вершина находится в точке $B(2; 3)$. Запишите уравнение параболы и определите, в каких точках она пересекает прямую $y = 1$.

11. При каких значениях a парабола $y = ax^2 + 4x - 1$ пересекает ось Ox в двух точках и её ветви направлены вниз?

12. При каком значении c наименьшее значение функции $y = 2x^2 + 8x - c$ равно 2?

13. При каком значении a наибольшее значение функции $y = ax^2 + 2x + 6$ равно 7?

14. На параболе $y = 2x^2 + 3x + 2$ найдите точки, у которых абсцисса и ордината являются противоположными числами.

15. Найдите уравнение прямой, параллельной оси абсцисс и имеющей с графиком функции $y = x^2 - 6x + 8$ ровно одну общую точку.

16. На графике функции $y = x^2 + 5x$ определите координаты всех точек, равноудалённых от осей координат.

17. Постройте график функции $y = -x^2 + 6x$. Укажите промежутки возрастания и убывания функции.

18. Постройте график функции $y = 4x^2 - 8x - 5$. Какие значения принимает функция, если $-1 \leqslant x \leqslant 3$?

19. Постройте график функции $y = -x^2 - 8x - 8$. Укажите множество значений функции.

20. Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{1 - x}$. При каких значениях аргумента функция принимает отрицательные значения?

21. Постройте график функции $y = \dfrac{-2x^2 + 5x + 7}{x + 1}$. При каких значениях аргумента функция принимает положительные значения?

22. Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{2 - x}$. Укажите множество её значений.

23. Найдите область определения и множество значений функции $f(x) = -2 + \sqrt{10x - x^2 - 25}$.

24. Найдите область определения и множество значений функции $f(x) = \sqrt{4 - (2x + 1)^2}$.

25. Постройте график функции $y = \dfrac{3x - 9}{x^2 - 3x}$. При каких значениях x значения функции положительны?

26. Постройте график функции $y = \dfrac{2 - 4x}{2x^2 - x}$. При каких значениях x выполняется неравенство $y \geqslant 2$?

27. Постройте график функции $y = \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x - 1}$. При каких значениях x выполняется неравенство $y > -1$?

28. Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 3x, \text{ если } x < 1, \\ -1, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 2x - 7, \text{ если } x > 3. \end{cases}$$

Найдите значение функции при $x = -1$.

29. Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x - 3, \text{ если } x < -2, \\ 1 - x^2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ x - 3, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

Укажите промежутки возрастания функции.

30. Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ если } x < 0, \\ x^2 - 4x + 2, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ -2x + 10, \text{ если } x > 4. \end{cases}$$

Укажите промежутки убывания функции.

31. Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 8, \text{ если } x < -2, \\ x^2 + 2x, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 1, \\ -3x + 6, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

При каких значениях x значения функции неотрицательны?

32. Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, \text{ если } x \leqslant 2, \\ x^2 - 2x, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

При каких значениях x значения функции неположительны?

Решите уравнения, использовав свойства входящих в них функций (33–36).

33. $3x^3 = 28 - 2x$.

34. $7x^{2011} + 2\sqrt{x} = 10 - x^{2013}$.

35. $\sqrt{x - 2} + 3 = 4x - x^2 - 1$.

36. $\sqrt{x^{2010} + 16} = 4 - |x|$.

Ответы

Функции и их графики

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Ответ	2	3	$x \leqslant 3$	$x > -0,8$	$[-1;4]$	$(-\infty;-8]\cup[1;\infty)$	4	2

№ задания	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Ответ	2	3	4	−6	4	4	3	1 2 3 В А Б	1 2 3 Б В А	1 2 3 Б В А

№ задания	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Ответ	1 2 3 Б А В	4	3	3	2	1	4	1 2 3 В А Б	1 2 3 Б В А	1 2 3 Б В А

№ задания	29	30	31	32	33	34	35	36	37
Ответ	1 2 3 В А Б	3	2	4	2	80	8	400	11

Использование свойств функций в решении уравнений и неравенств

№ задания	1	2	3	4
Ответ	$y = 0,8x + 2$; $(0; 2)$	$y = 2x - 7$; нет	$y = -4x - 5$; первой	$y = 3x - 3$; да

№ задания	5	6	7
Ответ	$y = 3x - 2$; $(0; -2)$	$y = -5x + 10$; $(2; 0)$	$4x + 5y = -20$

№ задания	8	9	10
Ответ	$3x - 7y = 21$	4; $(-2; 0)$	$y = -2x^2 + 8x - 5$; $(1; 1)$, $(3; 1)$

№ задания	11	12	13	14	15
Ответ	$(-4; 0)$	−10	−4	$(-1; 1)$	$y = -1$

№ задания	16	17	18	19
Ответ	$(0; 0)$, $(-4; -4)$, $(-6; 6)$	$(-\infty; 3]$, $[3; +\infty)$	$[-9; 7]$	$(-\infty; 8]$

№ задания	20	21	22
Ответ	$(3; +\infty)$	$(-\infty; -1) \cup (-1; 3,5)$	$(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$

№ задания	23	24	25	26
Ответ	$D(f) = \{5\}$, $E(f) = \{-2\}$	$D(f) = [-1,5;\ 0,5]$, $E(f) = [0; 2]$	$(0; 3)$, $(3; +\infty)$	$[-1; 0)$

№ задания	27	28	29
Ответ	$(-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$	5	$[-2; 0]$, $[2; +\infty)$

№ задания	30	31	32	33	34	35	36
Ответ	$[0; 2]$, $[4; +\infty)$	$\{-2\} \cup [0; 2]$	$(-\infty; -2] \cup \{2\}$	2	1	2	0

ГИА

Г.В. Сычёва, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев

МАТЕМАТИКА

ТЕМА «Функции»

Издательства «**АСТ**» и «**Астрель**» предлагают новую серию учебных пособий для подготовки к государственной итоговой аттестации «**Азбука ГИА**».

Содержание и структура пособий полностью соответствуют официальным документам ГИА, разработанным **Федеральным институтом педагогических измерений** (ФИПИ).

Каждая книга серии посвящена одной или нескольким крупным предметным темам, которые выносятся на экзамен. Рассматриваются все задания на эти темы частей 1 и 2 — базового, повышенного и высокого уровней сложности. Приводятся тесты на проверку различных умений и навыков.

ВНИМАНИЕ !

Издательство «Астрель», подготовившее эти книги, входит в официальный перечень издательств, которым Министерство образования и науки Российской Федерации дало право выпускать учебные пособия для общеобразовательных школ, имеющих государственную аккредитацию (Приказ № 729 от 14.12.2009 г.).

ISBN 978-5-271-39071-5

9 785271 390715